

(قسمت اول)

آزمایشگاه ریاضی

مقدمه

ریاضیات در تمام شاخه‌های آن به زندگی واقعی مربوط می‌شود و به‌کارگیری مفاهیم آن در فعالیت‌های روزانه به زندگی راحت‌تر و جذابی منجر می‌شود. ریاضیات اساس موفقیت در مباحث متنوع دوران تحصیل دانش‌آموز است و آزمایشگاه ریاضی می‌تواند تا حد زیادی به پیشرفت سطح دانش ریاضی او کمک کند.

آزمایشگاه ریاضی مکانی است که دانش‌آموز در آن مفاهیم ریاضی را طی انجام فعالیت‌های متفاوت و استفاده از انواع ابزارهای کمک‌آموزشی یاد می‌گیرد و آن‌ها را توسعه می‌دهد. این فعالیت‌ها ابتدا با حضور معلم انجام می‌شوند و در ادامه ممکن است توسط خود دانش‌آموز به منظور یادگیری بهتر گسترش یابند و با هدف ایجاد انگیزه و علاقه در وی برای توسعه دانش ریاضی او دنبال شوند. گرچه ریاضیات علمی تجربی نظیر فیزیک، شیمی یا زیست‌شناسی نیست، آزمایشگاه ریاضی قادر است سهمی بسزا در یادگیری مفاهیم متفاوت ریاضی و ایجاد مهارت در حل مسئله را دارا باشد. بر این اساس مجموعه مقالاتی با این عنوان به‌منظور آشنایی دانش‌آموزان دوره دوم متوسطه دبیرستان ارائه می‌شود تا با چگونگی انجام فعالیت‌ها در آزمایشگاه ریاضی آشنا شوند.

معرفی آزمایشگاه ریاضی و هدف‌های آن

امروزه سبک آموزش ریاضی به‌گونه‌ای تغییر کرده است که به دانش‌آموزان فرصت‌هایی برای بیان ایده‌های آن‌ها داده می‌شود. این فرصت‌ها به‌منظور ایجاد خلاقیت در امر یادگیری ریاضی داده می‌شوند. تحقق این امر مستلزم ایجاد مکانی است که امکان اخذ بازخورد سریع از معلمان و دانش‌آموزان فراهم باشد. آزمایشگاه ریاضی چنین فرصت‌هایی را به‌وجود می‌آورد.

در کلاس‌های عادی ریاضی چنین فرصت‌هایی برای دانش‌آموز مهیا نمی‌شود. آن‌ها غالباً شنونده هستند و

آنچه را که معلم تدریس می‌کند، مشاهده و یادداشت می‌کنند. به مهارت‌های حل مسئله و تحلیل مسائل و توسعه آن‌ها هم توجهی نمی‌شود. آزمایشگاه ریاضی این ویژگی را خواهد داشت که به یادگیرنده فواید طولانی‌مدت را ارائه می‌دهد، طوری که آموخته‌های وی فراموش نخواهد شد. این آزمایشگاه جایی است که دانش‌آموز می‌تواند مفاهیم ریاضی را بیاموزد و آن‌ها را توسعه دهد، قضا و واقعیت‌های ریاضی را طی فعالیت‌هایی و با به‌کارگیری ابزارهای کمک‌آموزشی متنوعی اثبات کند و در آنجا با مدل‌سازی، آزمایش و محاسبه یک مفهوم ریاضی را درک کند.

هدف‌های تشکیل آزمایشگاه ریاضی عبارت‌اند از:

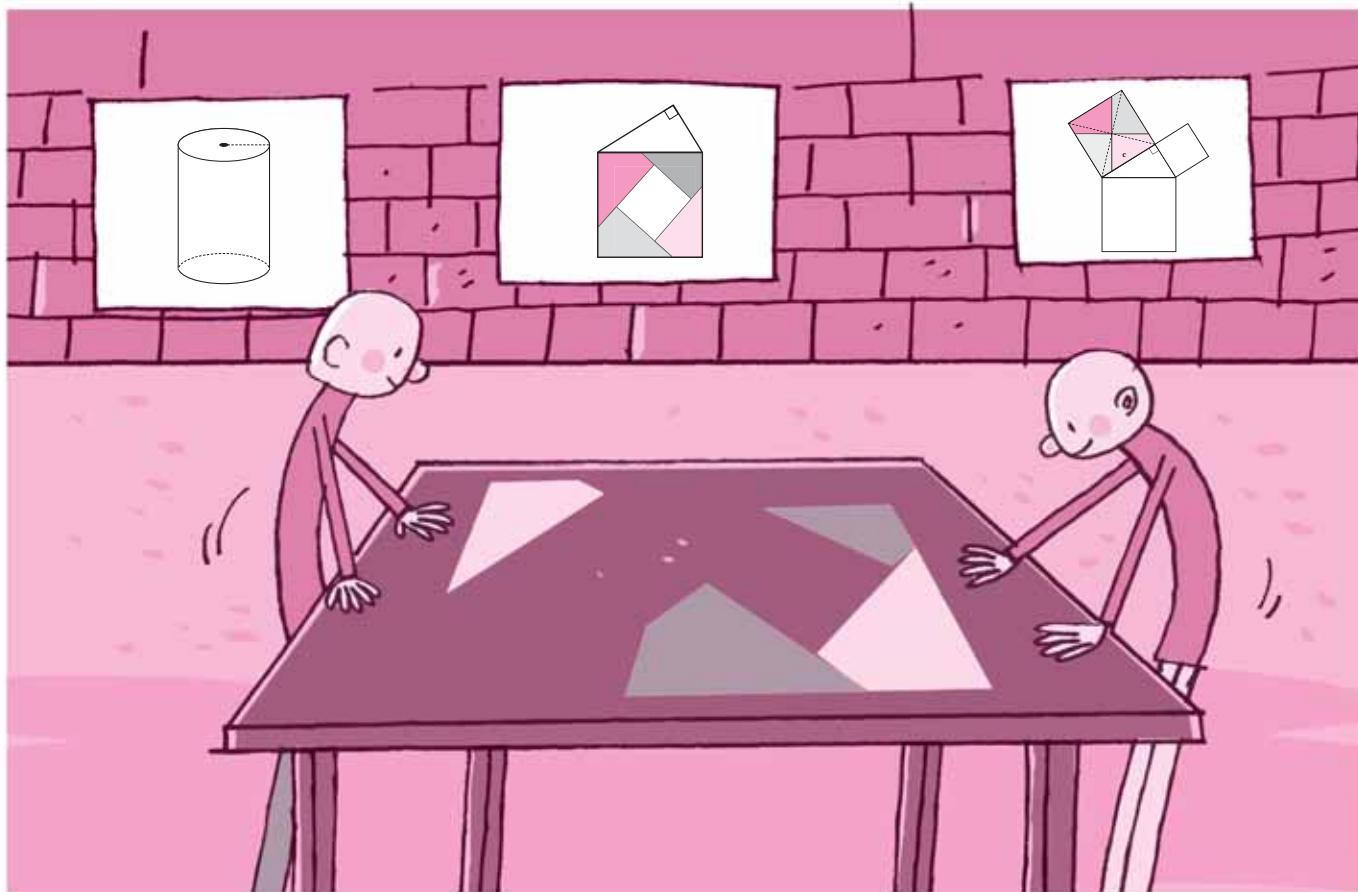
۱ کمک به دانش‌آموز برای آنکه به راحتی و با علاقه یک موضوع درسی را فراگیرد و رابطه بین مفاهیم ریاضی و زندگی روزمره را به نمایش بگذارد.

۲ ارائه قلمرو بیشتری برای مشارکت فردی و تشویق دانش‌آموزان به اینکه به یادگیرنده‌هایی خودمختار و مستقل تبدیل شوند. آزمایشگاه اجازه می‌دهد، هر دانش‌آموز در فضای ذهنی خود قرار بگیرد و با بهره‌گیری از دست و ذهن وسیع‌تر خود، به سهولت نسبت به موضوع شناخت پیدا کند.

۳ مهیا ساختن این امکان که دانش‌آموزان با همراهی معلم به تفکر و بحث با یکدیگر بپردازند و مفاهیم ریاضی را به شکل مؤثری تلفیق کنند. این شرایط فرصتی را برای فهم دقیق قوانین و واقعیت‌های ریاضی پدید می‌آورد تا دانش‌آموز این قاعده‌ها را در خودش درونی کند و آن‌ها را با استفاده از مدل‌سازی و روش‌های مربوطه کشف و اثبات کند.

۴ اعطای این توانمندی به معلم که ایده‌های ریاضی را با به‌کارگیری شیء‌ها، مدل‌ها، نمودارها، عکس‌ها، رایانه، نرم‌افزارهای ریاضی و سایر ابزارهای کمک‌آموزشی نشان دهد و تشریح کند و انگیزه یادگیری را در دانش‌آموز بالا ببرد.

۵ فراهم آوردن این امکان که دانش‌آموز فعالیتی را چندین بار تکرار و آن را اصلاح کند و دوباره



ریاضی براساس توانمندی‌های دانش‌آموز، ایجاد علاقه در جهت تفکر روی یک مسئله ریاضی و حل آن از طریق اصول و قوانین ریاضی، و در نهایت، به کارگیری این تفکر در زندگی خود، از هدف‌های موردنظر این آزمایشگاه است.

آزمایشگاه ریاضی سال‌هاست که در مدرسه‌های کشورهای چین، ژاپن و آمریکا برپا شده است و رضایت‌مندی دانش‌آموزان و اولیای آن‌ها و معلمان را به همراه داشته است. طراحی اولیه آزمایشگاه ریاضی به هزینه بالایی نیاز ندارد و با ابزارهای کمک‌آموزشی و لوازم و وسایلی برای مدل‌سازی و در نهایت تعدادی رایانه، این مکان تجهیز می‌شود. انتظار می‌رود چنین مکانی در هر مدرسه‌ای ایجاد شود و بر حسب نیازمندی‌ها و آنچه که قرار است در آن مورد آموزش قرار گیرد، تجهیز شود و تغییرات لازم در گذر زمان و به منظور ارتقای آن داده شود. در این آزمایشگاه می‌توان شخصی را با تخصص

روی مسئله فکر و آن را حل کند. این امر به توسعه توانایی تشخیص او کمک می‌کند و سبب علاقه‌مندی و سهولت در یادگیری می‌شود. ضمن آنکه تنوع روش‌ها در حل یک مسئله بر موضوع راه‌حل‌های چندگانه در یادگیری تأکید می‌کند.

ساختن محیطی مساعد و شادی‌بخش برای دانش‌آموزان تا طی انجام فعالیت به شکل عملی، با احساس و روحیه مثبتی موضوع موردنظر را یاد بگیرند. در این راستا معلم نقش بسزایی در بالا بردن انگیزه یادگیری و افزایش این حس خوب خواهد داشت که به شکوفایی استعدادها و نهفته دانش‌آموزان، با استفاده از روش‌های نوین و طرح مسائل ابتکاری و پرورش روحیه نوآوری و خلاقیت و ایجاد تفکر بر پایه استدلال‌های ریاضی منجر می‌شود. به کارگیری رایانه و نرم‌افزارهای آموزش ریاضی و بهره‌مندی از شبکه اینترنت به منظور آموزش مجازی، آموزش مدل‌سازی

**آموزش با رایانه
و به کارگیری
نرم افزارهای
آموزشی، چون
«جنوجبرا»،
«متمتیکا» یا
«متلب»، حائز
اهمیت است**

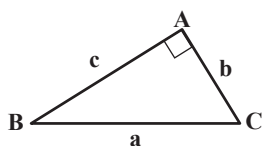
ابزارهای کمک آموزشی به منظور به دست آوردن یک رابطه یا قانون ریاضی ارائه می دهیم تا آشنایی اولیه با آزمایشگاه ریاضی حاصل شود.

فعالیت اول: قضیه فیثاغورس

معمولاً در اثبات های مربوط به هندسه در آزمایشگاه ریاضی از روش برش، تا کردن و چسباندن کاغذ استفاده می شود. هدف اولیه این فعالیت اثبات قضیه فیثاغورس در یک مثلث قائم الزاویه به اضلاع a ، b ، و c است که a ضلع روبه رو زاویه قائمه فرض می شود.

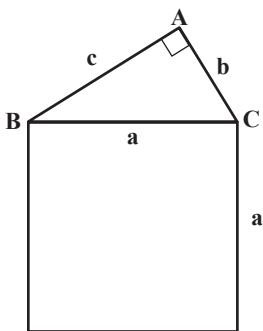
مراحل انجام این فعالیت به صورت زیر است:

۱. مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع a ، b ، و c سانتی متر، مطابق شکل ۱، رسم و آن را برش زده و روی یک صفحه مقوایی بچسبانید.



شکل ۱

۲. مربعی به ضلع a سانتی متر رسم کنید و برش دهید. سپس آن را مطابق شکل ۲ در کنار ضلع a مثلث قائم الزاویه بچسبانید.



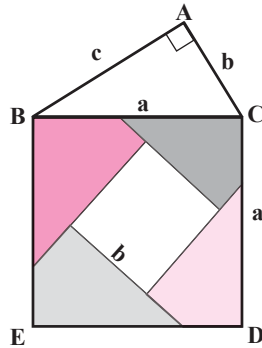
شکل ۲

۳. به طور مشابه دو مربع دیگر به اضلاع b سانتی متر و c سانتی متر بریده و آن ها را هم در کنار اضلاع متناظر دو مثلث مطابق شکل ۳ بچسبانید.

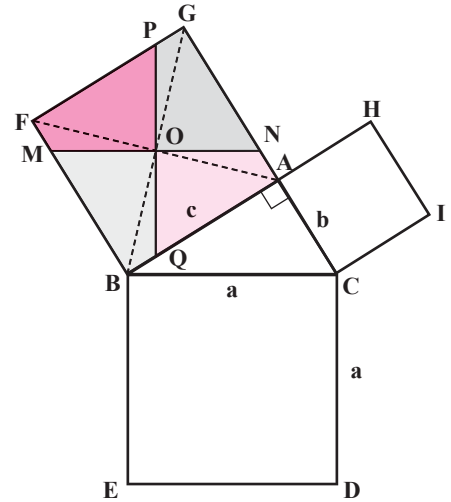
ریاضی در حد کارشناسی به کار گمارد که به نوعی دستیار معلم محسوب می شود. او باید دارای مهارت های خاص در انجام فعالیت های عملی باشد. در حال حاضر تقریباً تمام دبیرستان ها دارای آزمایشگاه در درس های فیزیک، شیمی و زیست شناسی هستند و برقراری آزمایشگاه ریاضی در کنار این آزمایشگاه ها، همان طور که در این علوم تجربی یادگیری مطالب را به شکل عملی تقویت می کند، در علم ریاضی نیز مثر خواهد بود. فعالیت های آزمایشگاه ریاضی به زمینه های متفاوت نظیر هندسه، حساب و جبر و... تعلق دارند که به شکل فردی یا گروهی و با راهنمایی و هدایت معلم انجام می گیرند. ضمن آنکه برخی از این فعالیت ها در کلاس درس هم قابل اجرا هستند. موضوع آموزش ریاضی در آزمایشگاه ریاضی می تواند در برنامه آموزشی منظم دوران تحصیلی دانش آموزان به صورت الزامی گنجانده شود و همانند سایر آزمایشگاه های علوم، مکمل آموزش کلاسی تلقی شود. فرایند ارزیابی و سنجش دانش آموزان در درس ریاضی هم می تواند مبتنی بر اخذ حداقل امتیاز کسب شده در آزمایشگاه باشد. این امتیاز توسط متصدی آزمایشگاه یا خود معلم، در قالب های متفاوت، نظیر مهارت های تحقیق گروهی و انجام پروژه هایی خاص در آزمایشگاه یا حتی منزل، در راستای افزایش کارایی علمی دانش آموزان به همراه کسب مهارت های اجتماعی داده می شود. بدین منظور معلمان ارجمند باید از روش هایی استفاده کنند که به افزایش تجربیات آموزشی آن ها در امر آموزش ریاضی بینجامد. بر این اساس، مسئولان امر طی دوره های آموزشی باید معلمان ریاضی را به گونه ای آماده کنند که مهارت های لازم را به منظور استفاده از آزمایشگاه ریاضی در کلاس های ریاضی یا مکانی که بدین منظور طراحی شده است، به دست آورند.

در این راستا، آموزش با رایانه و به کارگیری نرم افزارهای آموزشی، چون «جنوجبرا»، «متمتیکا» یا «متلب»، حائز اهمیت است. در واقع آزمایشگاه ریاضی باید طوری اجرا شود که دانش آموز نه فقط در زمان های حضور در مدرسه بتواند فعالیت های آن را انجام دهد، بلکه در اوقات فراغت هم قادر باشد، چنین فعالیت هایی را انجام دهد. در ادامه دو نمونه از فعالیت مقدماتی در درس هندسه را با استفاده از وسایل و

یعنی در مثلث قائم‌الزاویه ABC، مربع وتر برابر است با مجموع مربعات دو ضلع دیگر.



شکل ۴



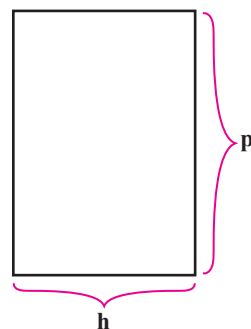
شکل ۳

به عنوان نمونه در انجام این فعالیت می‌توان اضلاع مثلث ABC را ۳، ۴ و ۵ سانتی‌متر در نظر گرفت. در حالت کلی سه عدد که در رابطه فیثاغورس صدق می‌کنند، سه‌تایی‌های فیثاغورسی نام دارند.

فعالیت دوم: محاسبه حجم استوانه و مخروط دوار قائم

در این فعالیت روشی ساده و عملی برای یافتن فرمول حجم استوانه و مخروط ارائه می‌شود. البته این روش یک اثبات دقیق ریاضی فرمول نیست، ولی به صورت توصیفی و شهودی ذهن دانش‌آموز را برای پذیرفتن این فرمول‌ها آماده می‌کند. ابتدا حجم یک استوانه دوار قائم را محاسبه می‌کنیم.

۱. صفحه‌ای مقوایی بردارید و روی آن مستطیلی به طول p سانتی‌متر و عرض h سانتی‌متر مطابق شکل ۵ برش دهید. (به‌عنوان مثال، $p=3\text{ cm}$ و $h=2\text{ cm}$).



شکل ۵

۴. اکنون تمام رأس‌های مربع‌ها را مطابق شکل ۳ نام‌گذاری کنید.

۵. قطرهای مربع ABFG را رسم کنید تا یکدیگر را در نقطه‌ای چون O قطع کنند (شکل ۳).

۶. از نقطه O خطی به موازات BC رسم کنید تا دو ضلع مربع ABFG را در نقطه‌های M و N قطع کند (شکل ۳).

۷. عمودمنصف پاره خط MN را رسم کنید تا دو ضلع دیگر این مربع را مطابق شکل ۳ در نقطه‌های P و Q قطع کند. به این ترتیب مربع ABFG به ۴ چهارضلعی تقسیم می‌شود. این چهارضلعی‌ها را رنگ کنید (شکل ۳).

۸. هر چهارضلعی حاصل در این مربع را برش دهید. همچنین مربع ACIH را نیز برش دهید و آن‌ها را مطابق شکل ۴ روی مربع BCDE بگذارید.

با انجام این مراحل مشاهده می‌کنیم که مربع ACIH و ۴ چهارضلعی مذکور به طور کامل مربع BCDE را می‌پوشانند.

بنابراین:

$$S_{BCDE} + S_{ACIH} = \text{مجموع مساحت‌های چهارضلعی‌ها}$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + S_{ABFG}$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

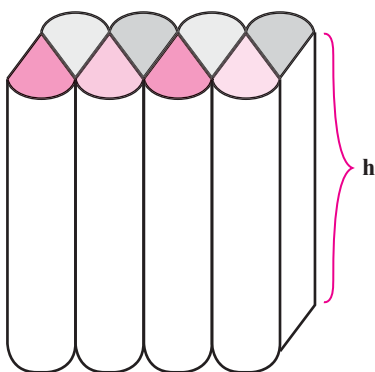
مکعب مستطیل به ابعاد r ، h و $\frac{p}{4}$ حاصل می‌شود که حجم آن با حجم استوانه برابر است. با توجه به اینکه $p = 2\pi r$ ، لذا داریم: بنابراین حجم مکعب مستطیل حاصل برابر است با: حجم مکعب مستطیل $V \approx$ (حجم استوانه)

$$= \text{ارتفاع} \times \text{عرض} \times \text{طول}$$

$$= \frac{p}{4} \times r \times h$$

$$= \pi r \times r \times h$$

$$= \pi r^2 h$$



شکل ۸

به این ترتیب حجم استوانه به‌طور تقریبی حاصل می‌شود. توجه شود که هرچه تعداد قطعات حاصل در مرحله ۴ افزایش یابد، حجم جسم حاصل به حجم مکعب مستطیل نزدیک‌تر و در نهایت مقدار دقیق‌تری برای حجم استوانه حاصل می‌شود.

در ادامه فعالیت، با استفاده از رابطه حاصل برای حجم استوانه، حجم مخروط دوار قائم را می‌یابیم.

۶. مخروطی به ارتفاع h و شعاع قاعده r بسازید.

بدین منظور با استفاده از پرگار دایره‌ای به شعاع

شکل ۹، قطاع AOB را طوری در نظر بگیرید که طول

\widehat{AB} با محیط قاعده مخروط، یعنی $2\pi r$ برابر باشد.

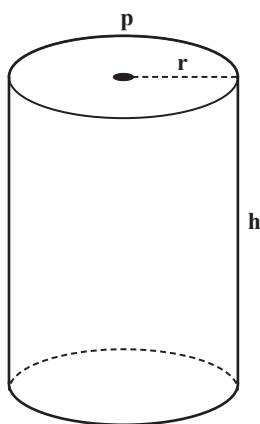
حال قطاع AOB را روی این مقوا برش دهید و آن را

طوری خم کنید که شعاع‌های OA و OB روی هم

قرار گیرند. به این ترتیب مخروطی با مولد l ساخته

می‌شود (شکل ۹).

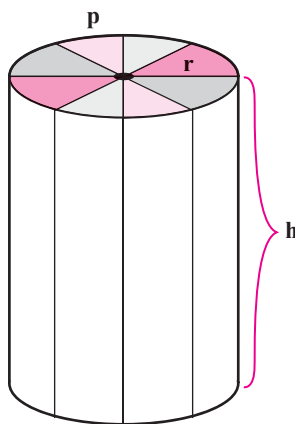
۲. مقوا را به آرامی طوری خم کنید که دو عرض مستطیل روی هم قرار گیرند. سپس محل تماس عرض‌ها را مطابق شکل ۶ به یکدیگر بچسبانید تا یک استوانه حاصل شود. در این حالت h ارتفاع استوانه و p محیط قاعده آن می‌شود. شعاع قاعده این استوانه را r فرض کنید.



شکل ۶

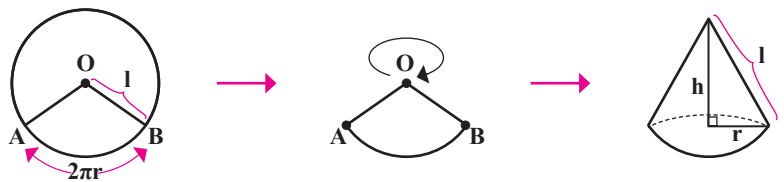
۳. با استفاده از خمیر یا خاک رس داخل این استوانه را پر کنید.

۴. استوانه حاصل را مطابق شکل ۷ به هشت قسمت یکسان تقسیم کنید و آن‌ها را برش دهید.



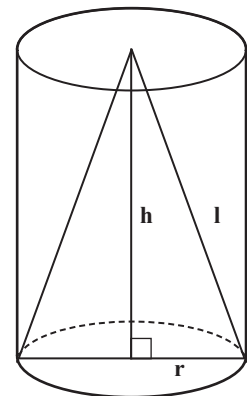
شکل ۷

۵. قطعات حاصل را مطابق شکل ۸ به‌طور متناوب کنار یکدیگر قرار دهید. با این کار به‌طور تقریبی یک



شکل ۹

۷. استوانه‌ای با همان ارتفاع h و شعاع قاعده r بسازید (شکل ۱۰).



شکل ۱۰

۸. مخروط حاصل را پر از شن کنید و سپس شن‌ها را از داخل مخروط به درون استوانه بریزید.

۹. مرحله ۸ را تکرار کنید تا استوانه کاملاً پر شود. مشاهده می‌کنید، نیاز است سه بار مخروط را پر از شن کنیم تا استوانه کاملاً پر شود. به این ترتیب حجم مخروط ثلث حجم استوانه‌ای با همان ارتفاع h و شعاع قاعده r است؛ یعنی: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ (حجم مخروط)

این نوع فعالیت‌ها را می‌توان برای یافتن سطح جانبی یا سطح کل استوانه و مخروط یا حجم کره، و همچنین اثبات هندسی اتحادهای جبری یا اثبات قضیه تالس، خواص گوناگون مثلث‌ها، و سایر مسائل هندسی انجام داد. همان‌طور که اشاره شد، یکی از هدف‌های آزمایشگاه ریاضی این است که مفاهیم، قضایا و روابط ریاضی به‌گونه‌ای ارائه شوند که دانش‌آموز آن‌ها را در حافظه بلندمدت خود قرار دهد و برای دوره زمانی طولانی به‌خاطر بسپرد و با گذر زمان فراموش نکند. ایجاد خلاقیت و درک استعداد‌های دانش‌آموزان در آزمایشگاه ریاضی تحقق می‌یابد. مدل‌سازی در این آزمایشگاه رکن مهم یادگیری است، طوری که قوانین ریاضی قابل فهم و به سادگی آموخته می‌شوند.

با استفاده از بسته‌های نرم‌افزاری ریاضی می‌توان موضوع یادگیری را سرعت بخشید و جذابیت زیادی را برای مخاطب ایجاد کرد

در آزمایشگاه ریاضی می‌توان به ریاضی با نگاه جدیدی وارد شد و کاربردهای ریاضی را هم‌زمان با موضوع‌های درسی به دانش‌آموزان ارائه داد. در واقع نگرشی از نوع سوم می‌توان به ریاضی داشت و در کنار هدف آموزش و یاددهی مفاهیم ریاضی توسط معلم (نگرش نوع اول)، یادگیری آن‌ها توسط دانش‌آموز (نگرش نوع دوم)، نگاه جدیدی با اولویت دادن به کاربردهای ریاضی در سایر علوم و زندگی روزمره ایجاد کرد. بر پایه این نگاه سوم، ریاضی از نوع سوم، یعنی ریاضی و کاربردهای آن به‌طور هم‌زمان شکل می‌گیرد. آزمایشگاه ریاضی قادر است بستری برای رسیدن به این هدف باشد. به‌علاوه می‌تواند انگیزه یادگیری را در دانش‌آموز افزایش دهد و شوق حل مسئله و بالا بردن معلومات ریاضی را در آن‌ها به‌وجود آورد. یکی از ابزارهای مهم کمک‌آموزشی رایانه است که قابلیت یاددهی مفاهیم ریاضی را به شکل مؤثری دارد. با استفاده از بسته‌های نرم‌افزاری ریاضی می‌توان موضوع یادگیری را سرعت بخشید و جذابیت زیادی را برای مخاطب ایجاد کرد. در مواردی که انجام محاسبات پیچیده ریاضی مشکل است و به صرف وقت زیاد نیاز دارد، می‌توان با بهره‌مندی از این نوع نرم‌افزارها به سرعت به نتیجه دست یافت. در علوم مهندسی ضروری است اعمالی چون حل دستگاه معادلات، محاسبه مقدار توابع، رسم نمودارها، مشتق‌گیری و نظایر آن به سرعت محاسبه شوند تا از نتایج آن‌ها برای رسیدن به هدف‌های اصلی بهره گرفت. امروزه انجام سریع محاسبات ریاضی بسیار مورد توجه است و به‌کارگیری رایانه نقشی اساسی در علوم کاربردی ایفا می‌کند. بر این اساس لازم است دانش‌آموزان با حداقل یک نرم‌افزار ریاضی آشنا شوند تا بتوانند اعمال و محاسبات ریاضی را در محیط آن نرم‌افزار انجام دهند. این امر در آزمایشگاه ریاضی قابل انجام است. در قسمت‌های بعدی، براساس کتاب‌های درسی ریاضی دوره دوم متوسطه و با استفاده از نرم‌افزار آموزشی «جنوجبرا»، مطالب درسی طی فعالیت‌های متنوع و هدف‌دار آموزش داده می‌شوند.

* منابع

1. Minara Yeasmin, Developing Mathematics Laboratory - A Shift from narrow goals towards higher goals for quality elementary education in mathematics, Imperial Journal of interdisciplinary Research, Vol.2, Issue 11, 2016.
2. G. Balasubramanian and R.P. Sharma, CBSE, Guidelines for Mathematics Laboratory in Schools, Class X, Dehli, 2006.